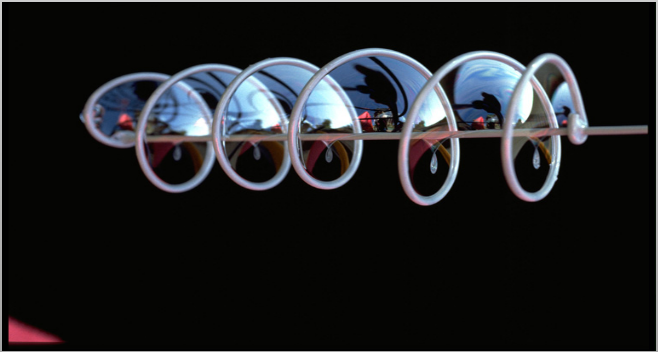
Construction d'hypersurfaces minimales de type Riemann

Antoine COUTANT-LEFRANÇOIS
Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées — Université Paris Est Créteil



1. Un peu de physique-chimie
   - Qu'est-ce qu'une bulle ?
   - Quelques lois physiques

1. Un peu de physique-chimie
   - Qu’est-ce qu’une bulle ?
   - Quelques lois physiques
2. Un peu de mathématiques
   - Qu’est-ce que la courbure moyenne d’une surface ?
   - Un peu d’histoire
   - Découpage et recollements
3. Mais au fait, à quoi ça sert ?
   - Architecture
   - Optimisation de chemins
   - Parce que les mathématiques...

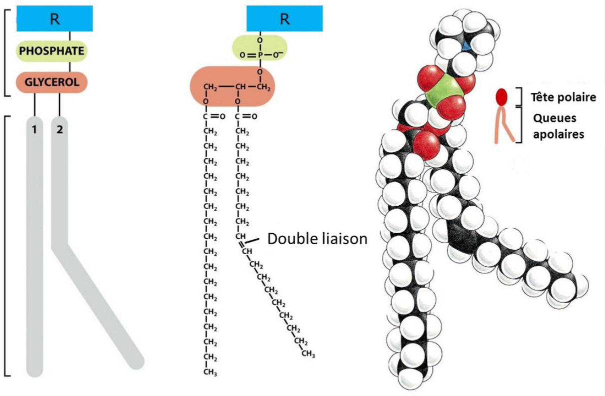
1. Un peu de physique-chimie
   - Qu'est-ce qu'une bulle ?
   - Quelques lois physiques

2. Un peu de mathématiques
   - Qu'est-ce que la courbure moyenne d'une surface ?
   - Un peu d'histoire
   - Découpage et recollements

3. Mais au fait, à quoi ça sert ?
   - Architecture
   - Optimisation de chemins
   - Parce que les mathématiques...

Quelques mots sur certains tensioactifs : les phospholipides amphiphiles

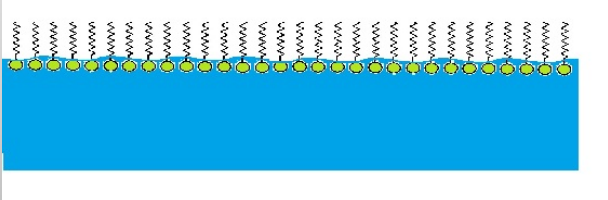
1. Modifier la tension superficielle.



Modèle d'un phospholipide.

Quelques mots sur certains tensioactifs : les phospholipides amphiphiles

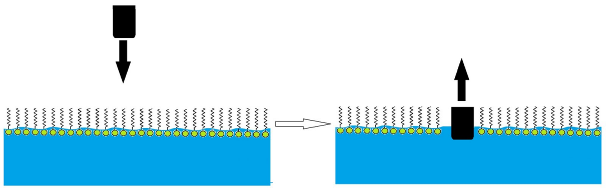
1. Modifier la tension superficielle.
2. Maintenir la surface d'un liquide tendue.



Modèle pour l'eau savonneuse.

Quelques mots sur certains tensioactifs : les phospholipides amphiphiles

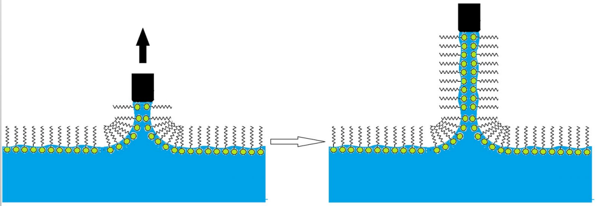
1. Modifier la tension superficielle.
2. Maintenir la surface d'un liquide tendue.



On plonge un petit objet dans l'eau.

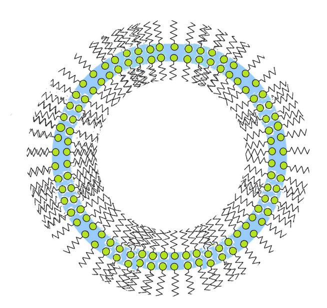
Quelques mots sur certains tensioactifs : les phospholipides amphiphiles

1. Modifier la tension superficielle.
2. Maintenir la surface d'un liquide tendue.



On le soulève.

Qu'est-ce qu'une bulle de savon ?



Quelques bulles...

Pourquoi c'est minimal ?

1. Le film de savon cherche à minimiser son *énergie*.

Pourquoi c'est minimal ?

1. Le film de savon cherche à minimiser son *énergie*.
2. Énergie = proportionnelle au nombre d'acides gras qui forment la peau.

Pourquoi c'est minimal ?

1. Le film de savon cherche à minimiser son *énergie*.
2. Énergie $=$ proportionnelle au nombre d'acides gras qui forment la peau.

3. Nombre d'acides gras $=$ proportionnelle à la surface.

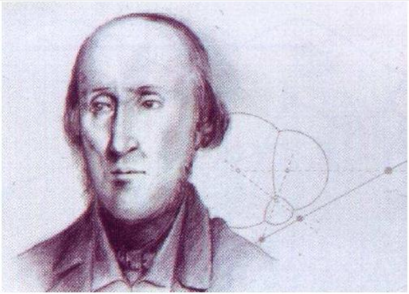
Pourquoi c'est minimal ?

1. Le film de savon cherche à minimiser son *énergie*.
2. Énergie = proportionnelle au nombre d'acides gras qui forment la peau.

3. Nombre d'acides gras = proportionnelle à la surface.
4. Les films de savon sont des surfaces minimales.

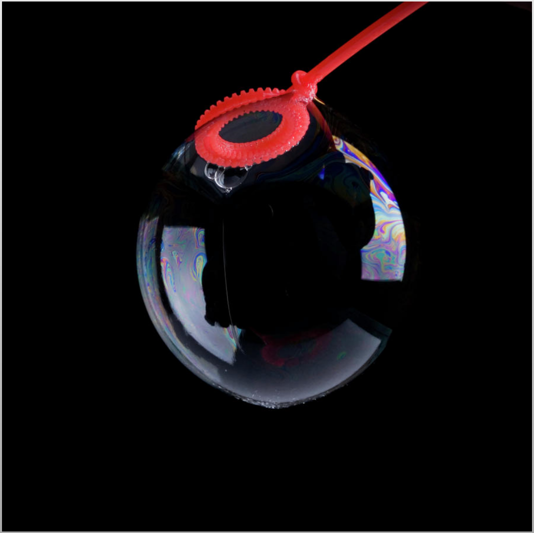
Les lois de Plateau

Joseph Plateau (1801–1883) : mathématicien et physicien belge.



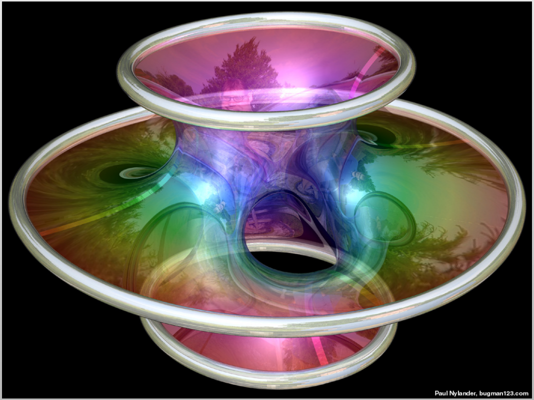
Les lois de Plateau

1. Les films de savon sont lisses.



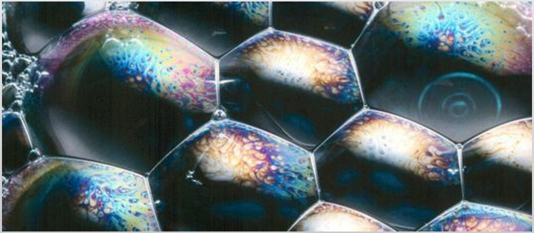
Les lois de Plateau

1. Les films de savon sont lisses.
2. La courbure moyenne est constante.



Les lois de Plateau

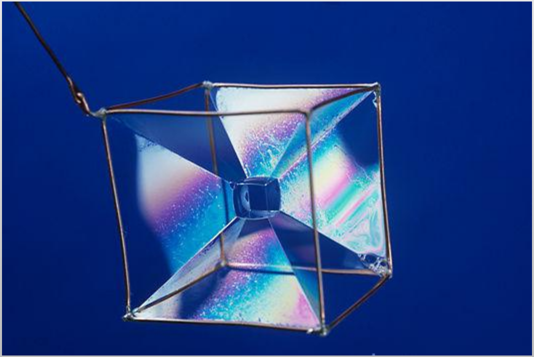
1. Les films de savon sont lisses.
2. La courbure moyenne est constante.
3. 3 surfaces se rencontrent avec des angles de $\frac{2\pi}{3}$ et forment une courbe régulière.



Lancer le film.

Les lois de Plateau

1. Les films de savon sont lisses.
2. La courbure moyenne est constante.
3. 3 surfaces se rencontrent avec des angles de $\frac{2\pi}{3}$ et forment une courbe régulière.
4. Lorsque ces lignes de raccordement se rejoignent, elles le font quatre par quatre et prennent alors les quatre directions tétraédriques.

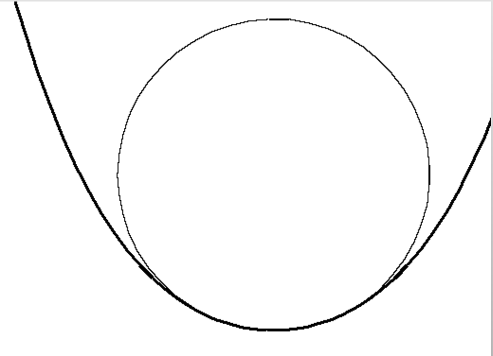


1. Un peu de physique-chimie
   - Qu'est-ce qu'une bulle ?
   - Quelques lois physiques

2. Un peu de mathématiques
   - Qu'est-ce que la courbure moyenne d'une surface ?
   - Un peu d'histoire
   - Découpage et recollements

3. Mais au fait, à quoi ça sert ?
   - Architecture
   - Optimisation de chemins
   - Parce que les mathématiques...

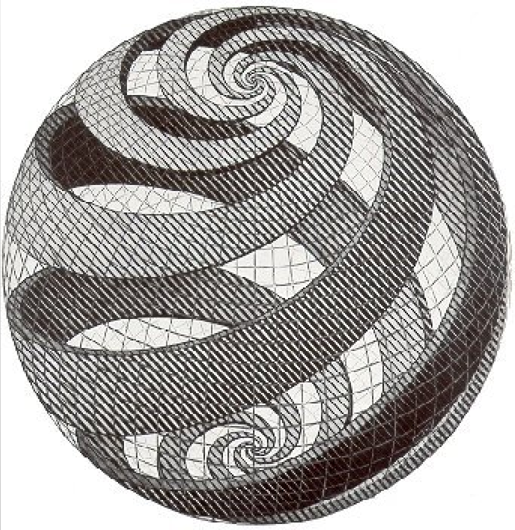
Courbure d'une courbe dans l'espace



$$\kappa \quad := \quad \frac{1}{R}.$$

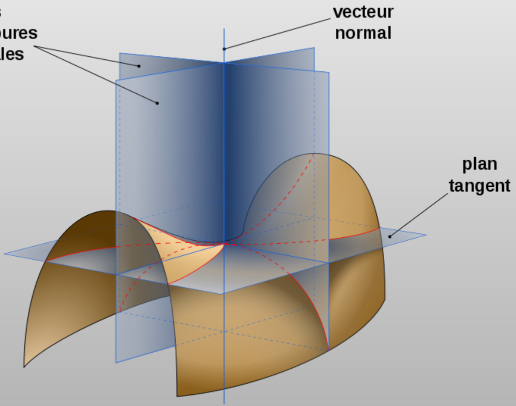
Courbure moyenne d'une surface

1. Courbure des courbes sur des surfaces.



Courbure moyenne d'une surface

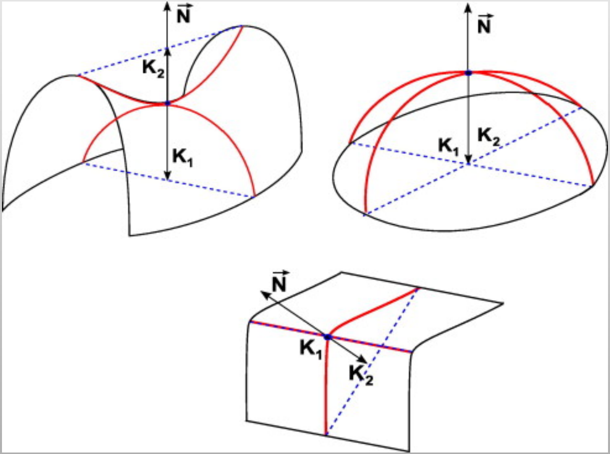
1. Courbure des courbes sur des surfaces.
2. Courbures principales κ_1 et κ_2.



Courbure moyenne d'une surface

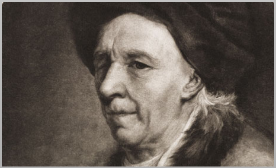
1. Courbure des courbes sur des surfaces.
2. Courbures principales κ_1 et κ_2.
3. Courbure moyenne :

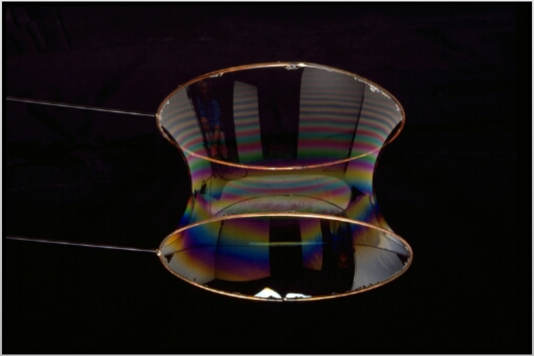
$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$



Historique

- Euler — 1744

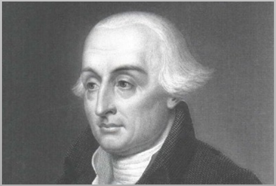




La caténoïde.

Historique

- Euler — 1744
- Lagrange — 1755



Théorème

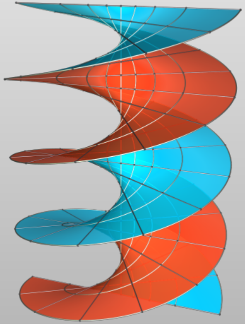
Si une surface Σ est représentée par le graphe dune fonction f au-dessus d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors elle est miimale si et seulement si

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}\right) = 0.$$

Équation d'Euler Lagrange.

Historique

- Euler — 1744
- Lagrange — 1755
- Meusnier — 1776



L'hélicoïde.

Historique

- Euler — 1744
- Lagrange — 1755
- Meusnier — 1776
- Scherk — 1834

La surface de Scherk.

Historique

- Euler — 1744
- Lagrange — 1755
- Meusnier — 1776
- Scherk — 1834
- Weirstrass — 1866

Théorème

Une surface est minimale si et seulement elle peut être représentée localement par des coordonnées

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{R}\left(\int_0^\alpha \frac{f\left(1-g^2\right)}{2}\mathrm{d}z\right) \\ \mathfrak{R}\left(\int_0^\alpha \frac{\imath f\left(1+g^2\right)}{2}\mathrm{d}z\right) \\ \mathfrak{R}\left(\int_0^\alpha f\cdot g\mathrm{d}z\right) \end{pmatrix},$$

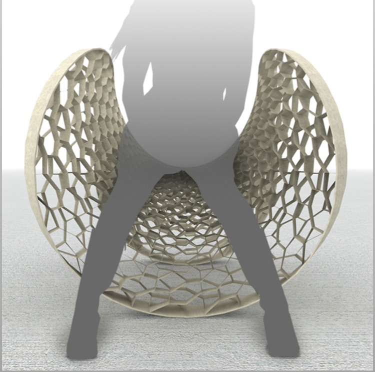
où f est holomorphe et g méromorphe telle que $f \cdot g^2$ holomorphe.

Représentation de Weirstrass.

Historique

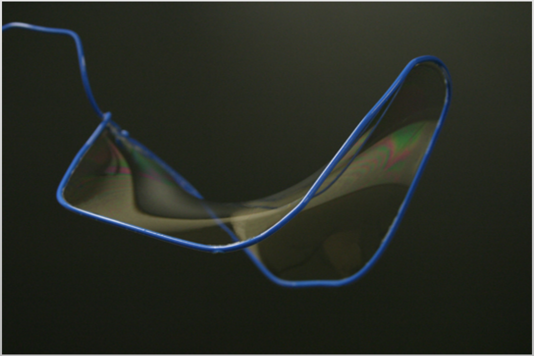
- Euler — 1744
- Lagrange — 1755
- Meusnier — 1776
- Scherk — 1834
- Weirstrass — 1866

La caténoïde : $f(z) = \frac{1}{z^2}$ et $g(z) = z$.
L'hélicoïde : $f(z) = \frac{\imath}{z^2}$ et $g(z) = z$.
Montrer le film.
Surface d'Enneper : $f(z) = 1$ et $g(z) = z$.



Historique

- Euler — 1744
- Lagrange — 1755
- Meusnier — 1776
- Scherk — 1834
- Weirstrass — 1866
- Plateau — 1873



Le problème de Plateau.

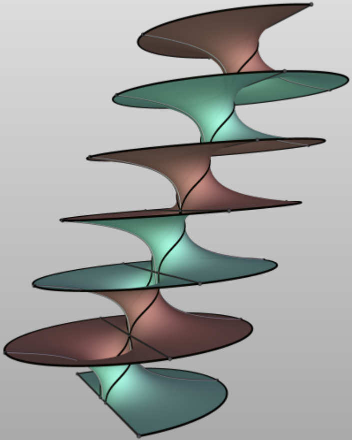
Historique

- Euler — 1744
- Lagrange — 1755
- Meusnier — 1776
- Scherk — 1834
- Weirstrass — 1866
- Plateau — 1873

Douglas, Radó — 1930's Résolution du problème de Plateau

Surfaces minimales de type Riemann

- Riemann — 1867

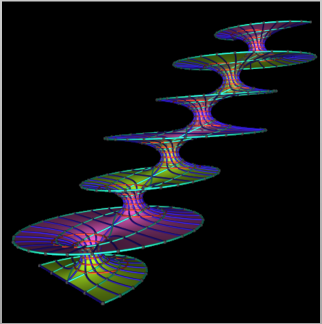


Surfaces minimales de type Riemann

- Riemann — 1867
- Enneper — 1870

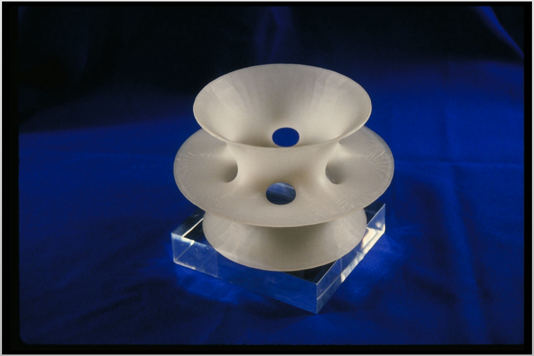
Théorème

Surface minimale feuilletée par des cercles $\Longrightarrow$ morceau de caténoïde ou de surface de Riemann.



Surfaces minimales de type Riemann

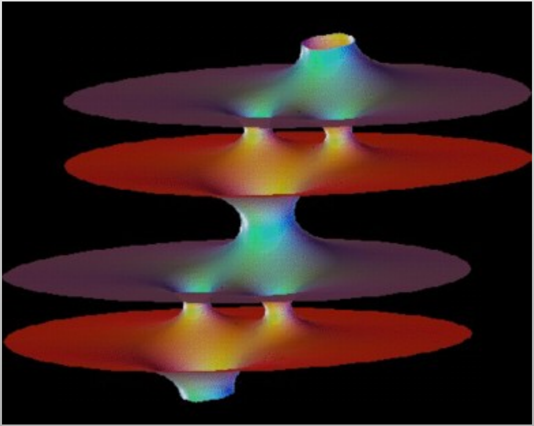
- Riemann — 1867
- Enneper — 1870
- Meeks — 1981



La surface de Costa-Hoffman-Meeks, de genre 4, avec 3 bouts.

Surfaces minimales de type Riemann

- Riemann — 1867
- Enneper — 1870
- Meeks — 1981
- F. Wei — 1995



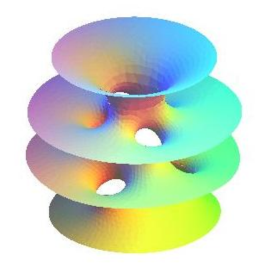
Exemple de Wei.

Surfaces minimales de type Riemann

- Riemann — 1867
- Enneper — 1870
- Meeks — 1981
- F. Wei — 1995
- Traizet — 2002

Généralisation des exemples de Riemann

- Nombre arbitraire de cous ;
- condition *balancée* et *non dégénérée* ;
- exemples numériques ;
- représentation de Weirstrass.



Surfaces minimales de type Riemann

- Riemann — 1867
- Enneper — 1870
- Meeks — 1981
- F. Wei — 1995
- Traizet — 2002
- Hauswirth — 2006

Généralisation des exemples de Riemann

- Dans les variétés homogènes de dimension 3 ;
- périodique, un seul cou.

Surfaces minimales de type Riemann

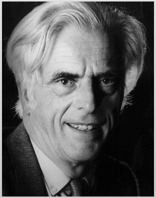
- Riemann — 1867
- Enneper — 1870
- Meeks — 1981
- F. Wei — 1995
- Traizet — 2002
- Hauswirth — 2006
- Pacard, Fakhi...

Généralisation des exemples de Riemann

- Aux hypersurfaces de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $n \geqslant 3$;
- périodique, un seul cou ;
- méthodes d'analyse non linéaire.

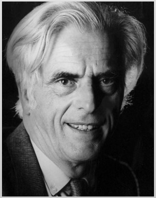
1. Un peu de physique-chimie
   - Qu'est-ce qu'une bulle ?
   - Quelques lois physiques
2. Un peu de mathématiques
   - Qu'est-ce que la courbure moyenne d'une surface ?
   - Un peu d'histoire
   - Découpage et recollements
3. Mais au fait, à quoi ça sert ?
   - Architecture
   - Optimisation de chemins
   - Parce que les mathématiques...

1. Frei Otto, architecte allemand.



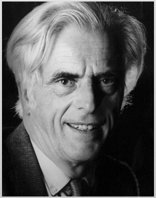
Exposition universelle — 1967

1. Frei Otto, architecte allemand.



Stade olympiqe de Munich — 1972

1. Frei Otto, architecte allemand.



2. Agence NOX de design néerlandais.

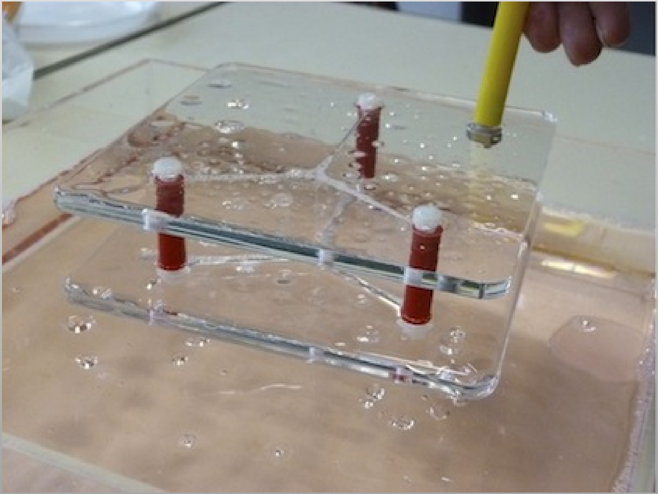
Water Cube, Pékin — 2008

Le problème de Steiner

Question : quel est le chemin le plus court qui relie un certain nombre de points donnés ?

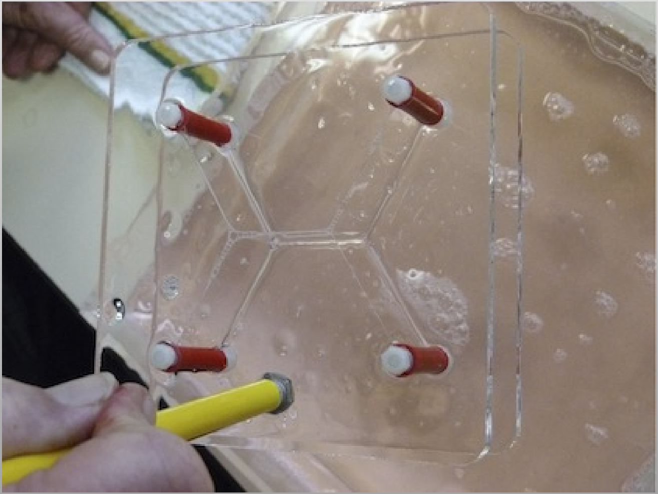
Le problème de Steiner

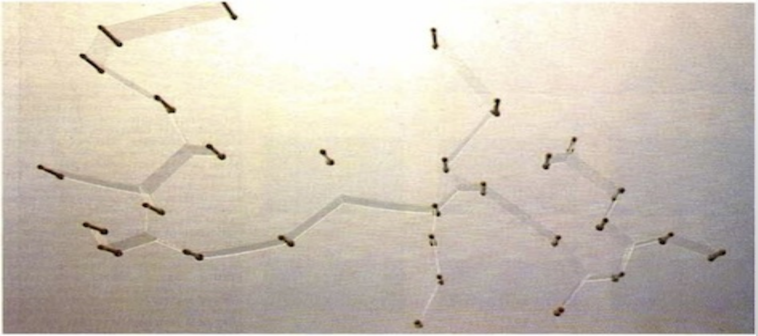
Question : quel est le chemin le plus court qui relie un certain nombre de points donnés ?



Le problème de Steiner

Question : quel est le chemin le plus court qui relie un certain nombre de points donnés ?

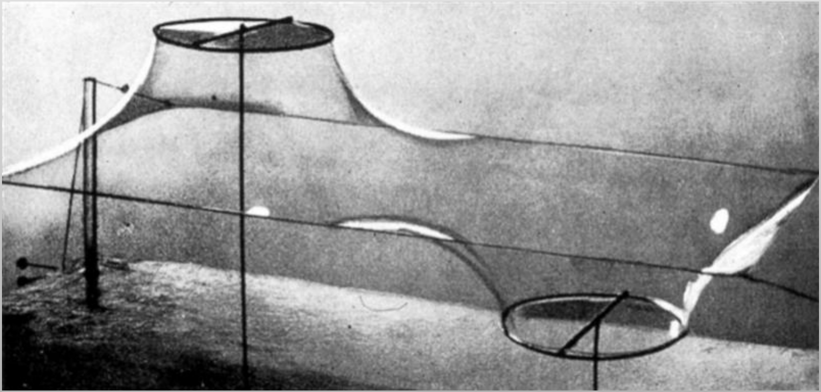


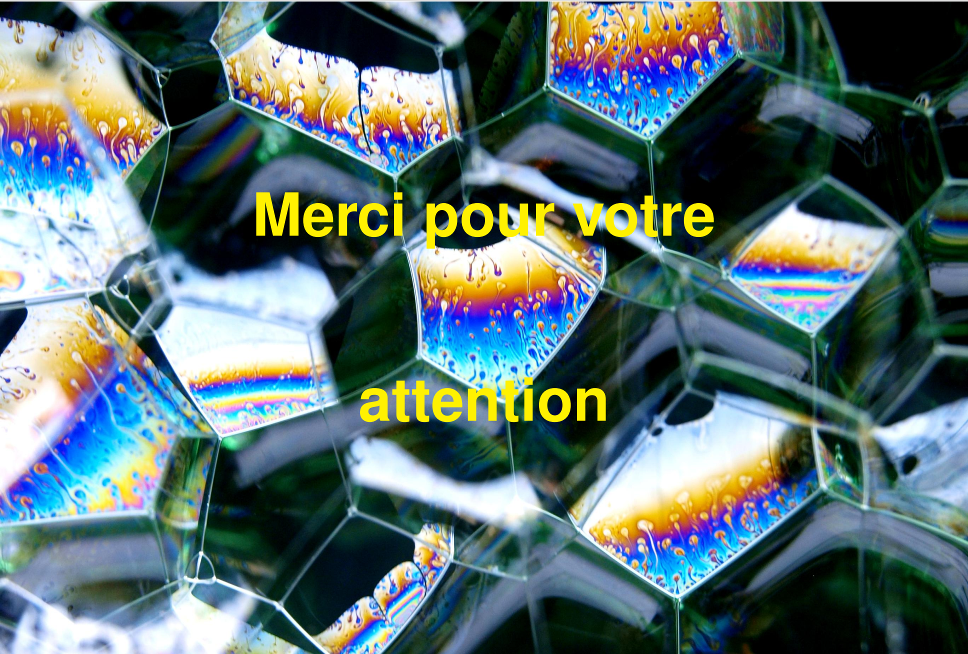



CALGARY
SEATTLE
PORTLAND
WINNIPEG
BOISE
ST. PAUL
SALT LAKE CITY
CHEYENNE
CHICAGO
PEORIA
SAN FRANCISCO
LINCOLN
KANSAS CITY
LAS VEGAS
LOUISVILLE
WICHITA
NASHVILLE
LOS ANGELES
OKLAHOMA CITY
MEMPHIS
CLEMSON
SAN DIEGO
PHOENIX
ALBUQUERQUE
CHARLESTON
DALLAS
MONTGOMERY
NEW ORLEANS
SAN ANTONIO

Parce que les mathématiques...

... c'est beau.





Merci pour votre attention