# Combinatoire énumérative

R. Maurice et V. Vong

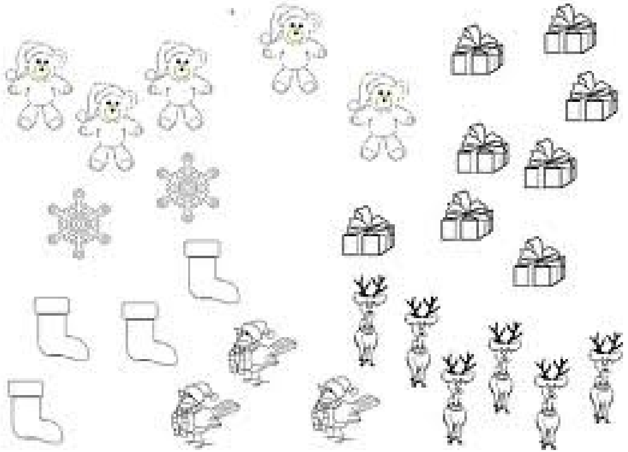
LIGM

12 juin 2012

# Introduction : qu'est-ce que la combinatoire ?

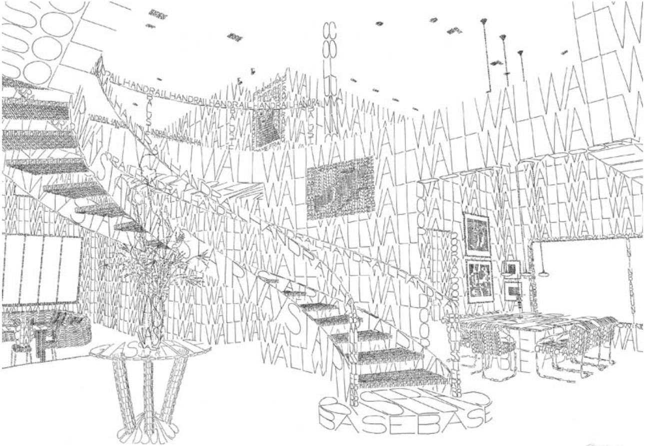
# Introduction : qu'est-ce que la combinatoire ?

C'est l'art de compter des objets.



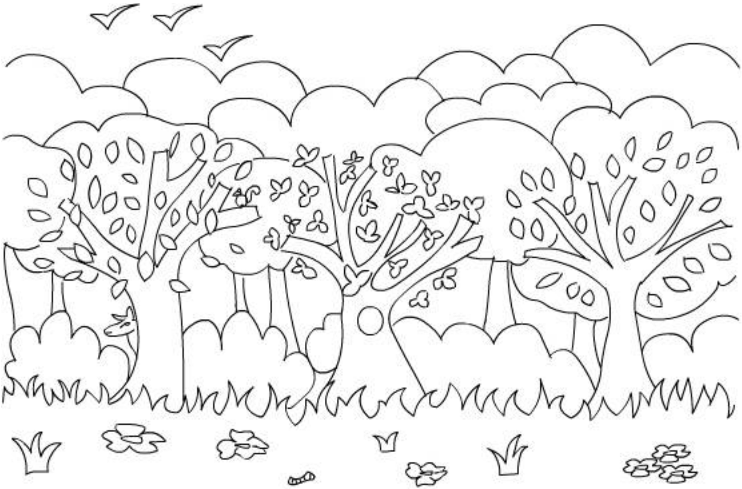
# Quels objets ?

des mots



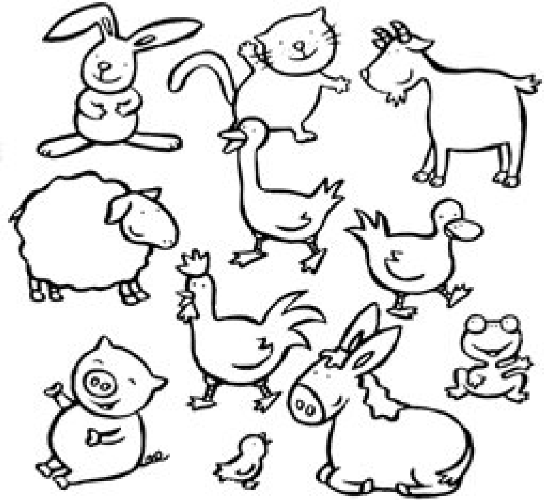
# Quels objets ?

des arbres



# Quels objets ?

des animaux



# Comment compter

**des mots**

de longueur $k$ sur un alphabet non commutatif $\mathcal{A}$ de taille $n$ :

# Comment compter

## des mots

de longueur $k$ sur un alphabet non commutatif $\mathcal{A}$ de taille $n$ :

non commutatif : police $\neq$ picole

# Comment compter

**des mots**

de longueur $k$ sur un alphabet non commutatif $\mathcal{A}$ de taille $n$ :

$$n^k$$

# Comment compter

## des mots

de longueur $k$ sur un alphabet non commutatif $\mathcal{A}$ de taille $n$ :

$$n^k$$

Exemple, $\mathcal{A} = \{a, b\}$ et $k = 3$ :

$$aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb$$

# Comment compter

**des mots**

de longueur $k$ sur un alphabet commutatif $\mathcal{X}$ de taille $n$, sans répétition de lettres :

# Comment compter

**des mots**

de longueur $k$ sur un alphabet commutatif $\mathcal{X}$ de taille $n$, sans répétition de lettres :

$$\text{commutatif : police} = \text{picole}$$

# Comment compter

**des mots**

de longueur $k$ sur un alphabet commutatif $\mathcal{X}$ de taille $n$, sans répétition de lettres :

$$\binom{n}{k}$$

# Comment compter

## des mots

de longueur $k$ sur un alphabet commutatif $\mathcal{X}$ de taille $n$, sans répétition de lettres :

$$\binom{n}{k}$$

Exemple, $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et $k = 2$ :

$$x_1x_2,\ x_1x_3,\ x_1x_4,\ x_2x_3,\ x_2x_4,\ x_3x_4$$

# Les permutations de taille $n$

**Définition**

Une permutation de taille $n$ est une bijection de $[|1, n|]$ vers $[|1, n|]$.

# Les permutations de taille $n$

**Définition**

Une permutation de taille $n$ est une bijection de $[|1,\ n|]$ vers $[|1,\ n|]$.

Exemples :

- $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$
- $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{matrix}$

# Les permutations de taille $n$

**Définition**

Une permutation de taille $n$ est une bijection de $[|1,\ n|]$ vers $[|1,\ n|]$.
Combien ?

# Les permutations de taille $n$

**Définition**

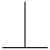
Une permutation de taille $n$ est une bijection de $[|1,\ n|]$ vers $[|1,\ n|]$.
Combien ?

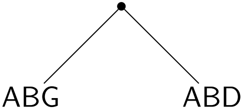
$$n!$$

# Les arbres binaires

## Définition

Un arbre binaire est soit vide, soit formé d'un nœud, sa racine, et de deux sous-arbres binaires, l'un appelé le fils gauche (ABG), l'autre le fils droit (ABD).

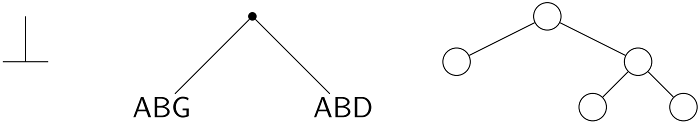




# Les arbres binaires

## Définition

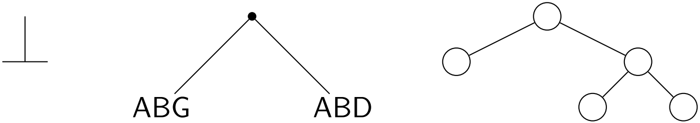
Un arbre binaire est soit vide, soit formé d'un nœud, sa racine, et de deux sous-arbres binaires, l'un appelé le fils gauche (ABG), l'autre le fils droit (ABD).



# Les arbres binaires

## Définition

Un arbre binaire est soit vide, soit formé d'un nœud, sa racine, et de deux sous-arbres binaires, l'un appelé le fils gauche (ABG), l'autre le fils droit (ABD).



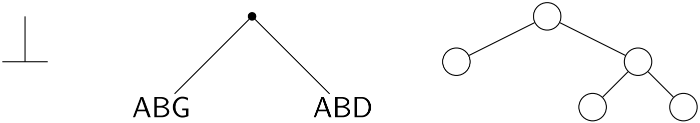

## Et alors.

- Combien y en a ?
- Comment les compter ?

# Les arbres binaires

## Définition

Un arbre binaire est soit vide, soit formé d'un nœud, sa racine, et de deux sous-arbres binaires, l'un appelé le fils gauche (ABG), l'autre le fils droit (ABD).




## Et alors.

- Combien y en a ?
- Comment les compter ?
- Par les séries génératrices.

# Les séries génératrices

## Définition

$\mathcal{F}$ = famille d'objets (ex : mots, arbres, ...).

$$\Phi_{\mathcal{F}}(t) = \sum_{a \in \mathcal{F}} t^{|a|} = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k t^k.$$

## A nouveau les mots

$\mathcal{F}$ = mots sur un alphabet de taille $n$.

$$\Phi_{\mathcal{F}}(t) = 1 + n\,t + n^2\,t^2 + n^3\,t^3 + \cdots = \frac{1}{1 - n\,t}.$$

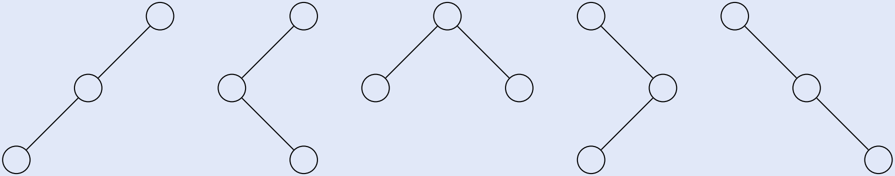
# Les séries génératrices

## Compter les arbres binaires

$\mathcal{F}$ = arbres binaires.

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \{\perp\} + \bullet \times \mathcal{F} \times \mathcal{F} \\ \Phi_{\mathcal{F}}(t) &= 1 + t\,\Phi_{\mathcal{F}}(t)^2 \\ \Phi_{\mathcal{F}}(t) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4\,t}}{2\,t} = 1 + t + 2\,t^2 + \color{red}{5}\,t^3 + 14\,t^4 + \cdots\end{aligned}$$

## Arbres binaires de taille 3



# Les séries génératrices

### Compositions

Les compositions d'un entier $n$ sont les suites d'entiers strictement positifs dont la somme vaut $n$.

Par exemple, considérons la composition $(5, 1, 3)$ de 9.

# Les séries génératrices

## Compositions

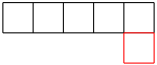
Les compositions d'un entier $n$ sont les suites d'entiers strictement positifs dont la somme vaut $n$.

Par exemple, considérons la composition $(5, 1, 3)$ de 9.

## Compositions

Les compositions d'un entier $n$ sont les suites d'entiers strictement positifs dont la somme vaut $n$.

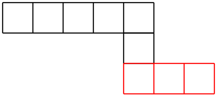
Par exemple, considérons la composition $(5, 1, 3)$ de 9.



## Compositions

Les compositions d'un entier $n$ sont les suites d'entiers strictement positifs dont la somme vaut $n$.

Par exemple, considérons la composition $(5, 1, 3)$ de 9.

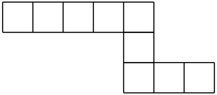


# Les séries génératrices

## Compositions

Les compositions d'un entier $n$ sont les suites d'entiers strictement positifs dont la somme vaut $n$.

Par exemple, considérons la composition $(5, 1, 3)$ de 9.

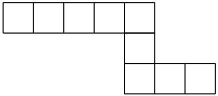


# Les séries génératrices

## Compositions

Les compositions d'un entier $n$ sont les suites d'entiers strictement positifs dont la somme vaut $n$.

Par exemple, considérons la composition $(5, 1, 3)$ de 9.



## Compter les compositions

$\mathcal{F}$ = les compositions.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \{\emptyset\} + \boxed{\phantom{\mathcal{F}}}\boxed{\mathcal{F}} + \begin{array}{c}\boxed{\phantom{\mathcal{F}}}\\[-2pt]\boxed{\mathcal{F}}\end{array} - \boxed{\phantom{\mathcal{F}}} \\
\Phi_{\mathcal{F}}(t) &= 1 + 2t\,\Phi_{\mathcal{F}}(t) - t \\
\Phi_{\mathcal{F}}(t) &= \frac{1-t}{1-2\,t} = 1 + t + 2\,t^2 + 4\,t^3 + 8\,t^4 + \cdots
\end{aligned}$$

## Générer et compter des mots

**sur l'alphabet non commutatif $\{a_1, a_2\}$**

$$\frac{1}{1-(a_1+a_2)} = 1 + (a_1 + a_2) + (a_1 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_2 a_2) + \cdots$$

# Générer et compter des mots

## sur l'alphabet non commutatif $\{a_1, a_2\}$

$$\frac{1}{1-(a_1+a_2)} = 1 + (a_1 + a_2) + (a_1 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_2 a_2) + \cdots$$

## Spécialisation d'alphabet

$$a_1 \rightsquigarrow t,\ a_2 \rightsquigarrow t$$

$$\frac{1}{1-2\,t} = 1 + 2\,t + 4\,t^2 + \cdots$$

**sans répétition de lettres, sur l'alphabet commutatif $\{x_1, x_2, x_3\}$**

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) = 1 + (x_1 + x_2 + x_3) + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + x_1x_2x_3$$

## Générer et compter des mots

### sans répétition de lettres, sur l'alphabet commutatif $\{x_1, x_2, x_3\}$

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) = 1+(x_1+x_2+x_3)+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+x_1x_2x_3$$

### Spécialisation d'alphabet

$$x_1 \rightsquigarrow t,\ x_2 \rightsquigarrow t,\ x_3 \rightsquigarrow t$$

$$(1+t)^3 = 1+3\,t+3\,t^2+t^3.$$

## Générer et compter des sous-ensembles

**Sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et mots sur $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$**

$$\begin{array}{ccc} \{1,3\} & \longrightarrow & x_1\,x_3 \\ \{1,3,4,7\} & \longrightarrow & x_1\,x_3\,x_4\,x_7 \\ \{1,2,\ldots,n\} & \longrightarrow & x_1\,x_2\cdots x_n \end{array}$$

# Générer et compter des sous-ensembles

## Sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et mots sur $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$$\begin{array}{ccc} \{1,3\} & \longrightarrow & x_1\, x_3 \\ \{1,3,4,7\} & \longrightarrow & x_1\, x_3\, x_4\, x_7 \\ \{1,2,\ldots,n\} & \longrightarrow & x_1\, x_2 \cdots x_n \end{array}$$

## Spécialisation d'alphabet

Termes homogènes de degré 2 de $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4)(1 + x_5)$ :

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5$$

$$x_i \rightsquigarrow q^i$$

$$q^3 + q^4 + 2\, q^5 + 2\, q^6 + 2\, q^7 + q^8 + q^9$$

# Quelques motivations sur une correspondance mots-objets combinatoires

1. Interpréter les objets combinatoires comme des mots, et justifier le calcul symbolique sur les objets combinatoires ;
2. trouver les propriétés algébriques sous-jacent aux opérations sur les objets ;
3. analyse d'algorithmes.

# Association mot-objet combinatoire

1. Standardisation ;
2. insertion dans un arbre binaire de recherche ;
3. insertion dans un ruban.

# Standardisation d'un mot

Soit le mot $w = abaacb$.

$$\begin{array}{cccccc} \color{red}{1} & & & & & \\ a & b & a & a & c & b \end{array}$$

# Standardisation d'un mot

Soit le mot $w = abaacb$.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & 2 & & & \\ a & b & a & a & c & b \end{array}$$

# Standardisation d'un mot

Soit le mot $w = abaacb$.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & 2 & 3 & & \\ a & b & a & a & c & b \end{array}$$

# Standardisation d'un mot

Soit le mot $w = abaacb$.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 2 & 3 & & \\ a & b & a & a & c & b \end{array}$$

# Standardisation d'un mot

Soit le mot $w = abaacb$.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 2 & 3 & & \color{red}{5} \\ a & b & a & a & c & b \end{array}$$

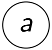
# Standardisation d'un mot

Soit le mot $w = abaacb$.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 2 & 3 & \textcolor{red}{6} & 5 \\ a & b & a & a & c & b \end{array}$$

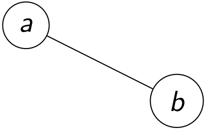
# Insertion d'un mot dans un arbre binaire

Soit le mot $w = abbac$.



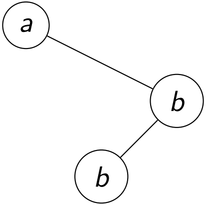
# Insertion d'un mot dans un arbre binaire

Soit le mot $w = abbac$.



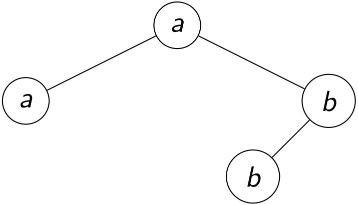
# Insertion d'un mot dans un arbre binaire

Soit le mot $w = abbac$.



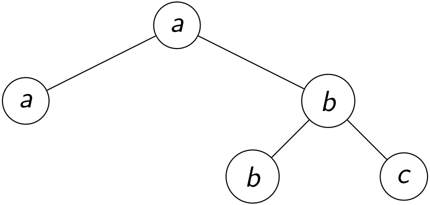
# Insertion d'un mot dans un arbre binaire

Soit le mot $w = abbac$.



# Insertion d'un mot dans un arbre binaire

Soit le mot $w = abbac$.



# Insertion dans un ruban

Soit $w$ le mot suivant : $w = abbacdaab$ :

# Insertion dans un ruban

Soit $w$ le mot suivant : $w = abbacdaab$ :

$$\boxed{a}$$

# Insertion dans un ruban

Soit $w$ le mot suivant : $w = abbacdaab$ :

| | |
|---|---|
| $a$ | $b$ |

# Insertion dans un ruban

Soit $w$ le mot suivant : $w = abbacdaab$ :

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $b$ |

# Insertion dans un ruban

Soit $w$ le mot suivant : $w = abbacdaab$ :

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $b$ |
| | | $a$ |

# Insertion dans un ruban

Soit $w$ le mot suivant : $w = abbacdaab$ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $b$ | |
| | | $a$ | $c$ |

# Insertion dans un ruban

Soit $w$ le mot suivant : $w = abbacdaab$ :

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{b} & & \\ & & \boxed{a} & \boxed{c} & \boxed{d} \end{array}$$

Soit $w$ le mot suivant : $w = abbacdaab$ :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $b$ | | |
| | | $a$ | $c$ | $d$ |
| | | | | $a$ |

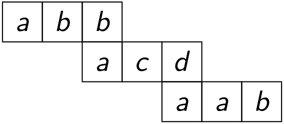
# Insertion dans un ruban

Soit $w$ le mot suivant : $w = abbacdaab$ :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $b$ | | | |
| | | $a$ | $c$ | $d$ | |
| | | | | $a$ | $a$ |

# Insertion dans un ruban

Soit $w$ le mot suivant : $w = abbacdaab$ :



# Vers de nouveaux horizons

1. Généraliser les séries génératrices ;

# Vers de nouveaux horizons

1. Généraliser les séries génératrices ;
2. multiplier des objets combinatoires ;

# Vers de nouveaux horizons

1. Généraliser les séries génératrices ;
2. multiplier des objets combinatoires ;
3. compter les moutons.